52. Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit in $\mathbb{R}$:

$$(a) \quad f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

$$(b) \quad f(x) = \begin{cases} x\,\sin\frac{1}{x} & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

53. Berechnen Sie im Existenzfall die Grenzwerte von

a)
$$\lim_{z\to 1} \frac{z^m - 1}{z^n - 1} \quad \text{für} \quad z \in \mathbb{C}\backslash\{1\}, \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

b)
$$\lim_{x\to 0} x(x - [x])$$

c)
$$\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}\right)$$

54. Zeigen Sie: Es gibt keine stetige Funktion $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, die jeden Funktionswert genau zweimal annimmt.

55. Sei die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \notin \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{q} & \text{für } x = \frac{p}{q} \text{ mit } p \in \mathbb{N}_0 \text{ und } q \in \mathbb{N} \text{ und } p, q \text{ teilerfremd } (0 = \frac{0}{1}). \end{cases}$$

In welchen Punkten ist f stetig?
Hinweis: Zeigen Sie: Für eine Folge (r_n) von rationalen Zahlen $r_n = p_n/q_n$ mit $p_n, q_n \in \mathbb{N}$, welche gegen eine irrationale Zahl $x_0 \in (0,1)$ konvergiert, ist die Nenner-Folge (q_n) unbeschränkt.

56. Sei $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ mit $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ und $c \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Die Gleichung

$$\frac{1}{x - a_1} + \frac{1}{x - a_2} + \cdots + \frac{1}{x - a_n} = c$$

hat im Fall $c = 0$ genau $n - 1$ reelle Lösungen, im Fall $c \neq 0$ genau n.